UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dept. Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas II
CI 2526

Práctica 6

1. Considere el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definamos la siguiente relación R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$

   a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.

   b) Halle las siguientes clases de equivalencia $\overline{(2,0)}$, $\overline{(5,5)}$, $\overline{(1,2)}$.

   c) ¿Qué puede decir de los elementos de cada clase, es decir, ¿Con qué números enteros podemos representar cada una de las clases anteriores?

2. Dé un ejemplo de conjuntos finitos A, B con cuatro o más elementos cada uno y una función $f : A \to B$ tal que:

   a) f no sea uno a uno ni sobre.

   b) f sea uno a uno pero no sobre.

   c) f sea sobre pero no uno a uno.

   d) f sea uno a uno y sobre.

3. Dé ejemplos de funciones biyectivas entre los conjuntos indicados

   a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

   b) $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

   c) $f_3 : (0,1) \to \mathbb{R}$

   d) $f_4 : (0,1) \to (a,b)$

   e) $f_6 : \{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}^*\} \to \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\}$

   f) $f_9 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$

4. Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Por simplicidad suele representarse a sus imágenes por f_n.

   La sucesión de Fibonacci que es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se define por $f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

   Muestre si es inyectiva o sobreyectiva.

5. Dados los siguientes pares de funciones, use los teoremas dados en clase (7.4 del Libro de Yriarte) para determinar en cada caso si $f \cdot g$ es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva. Dé la función inversa si la tiene. Justifique

   a) $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{x-2}$ y $g : \mathbb{R} - \{0, 1\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ dada por $g(x) = \frac{2}{1-x}$.

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = x^3 + 1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = |x|$

   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = tg^{-1}(x)$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x + 2$

   d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x+1 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & 1 \leq x \end{cases}$

   y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \exp(x)$